Chapitre 42

Fonctions de deux variables

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure d'espace euclidien : on notera $\langle \bullet | \bullet \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, $\|\bullet\|$ la norme euclidienne et d la distance euclidienne.

Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ (cf plus loin pour une définition). I désigne un intervalle ouvert non trivial de $\mathbb{R}$.

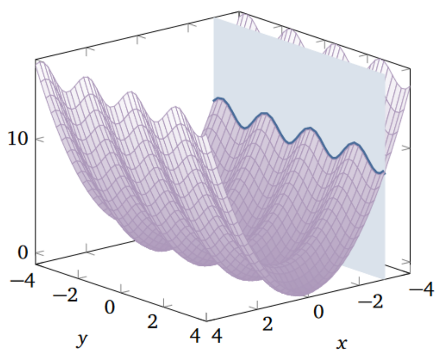
1 Graphe d'une fonction de deux variables

Il est usuel de représenter une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou plutôt son graphe) par une courbe d'équation $y = f(x)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on la représentera dans $\mathbb{R}^3$ par une surface d'équation $z = f(x, y)$.

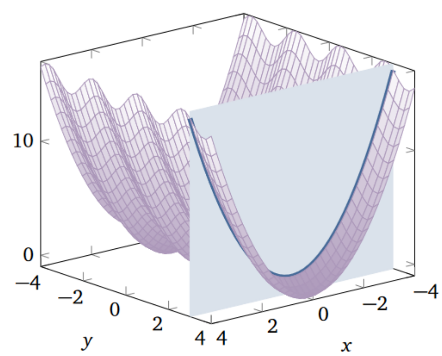
Exemple 1. Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + \sin(3y)$. Pour construire / se représenter mentalement son graphe (ou sa surface) $\mathscr{S}$ en 3D, il est fréquent de réaliser des “coupes” de cette surface par des plans qui balaient l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- L'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = f(\lambda, y) = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan. C'est donc une sinusoïde.
  - Avec $\lambda = -3$, on a donc la courbe d'équation $z = 9^2 + \sin(3y)$, cf dessin ci-dessous.
- L'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $y = \lambda$ est la courbe d'équation $z = f(x, \lambda) = x^2 + \sin(3\lambda)$ dans ce plan. C'est donc une parabole.
  - Avec $\lambda = 3$, on a donc la courbe d'équation $z = x^2 + \sin(9)$, cf dessin ci-dessous.

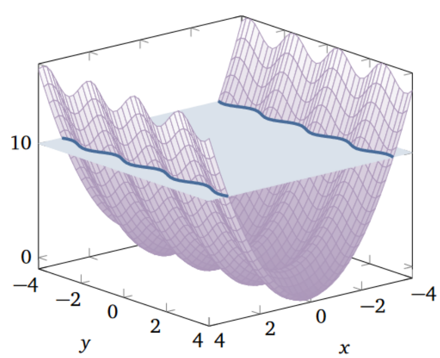
Intersection de $\mathscr{S}$ avec $x = -3$



Intersection de $\mathscr{S}$ avec $y = 3$

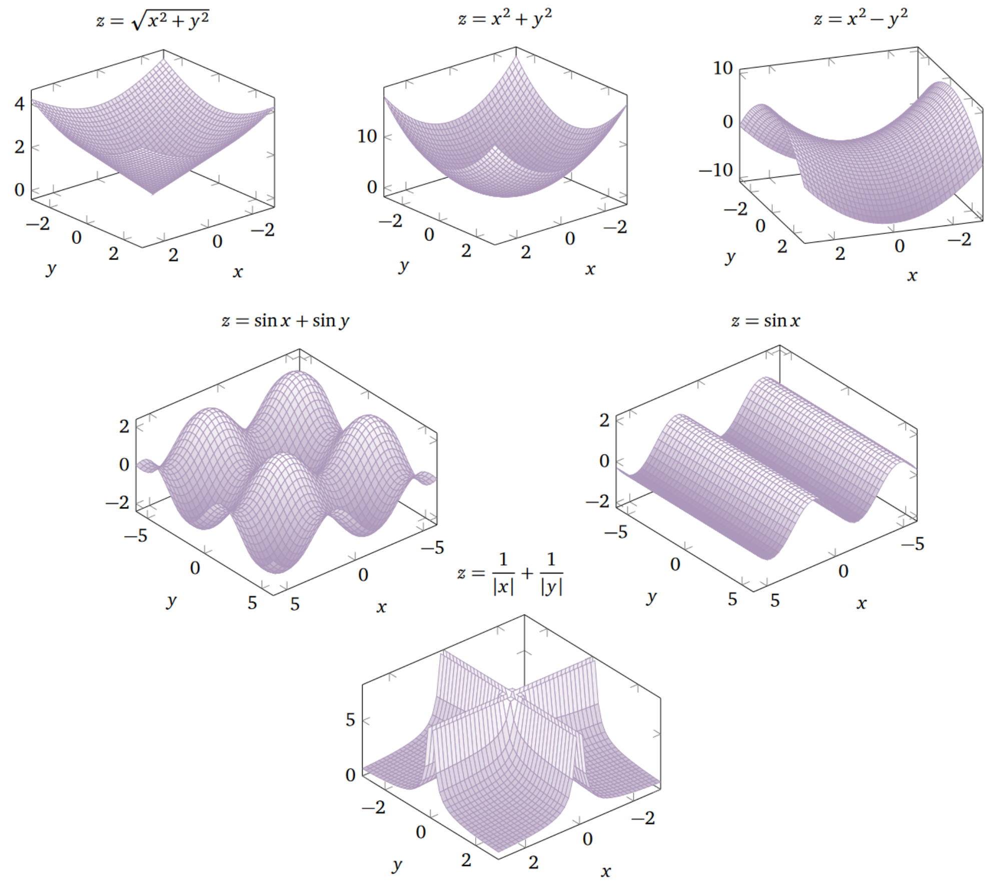


Intersection de $\mathscr{S}$ avec $z = 10$



- L'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $z = \lambda$ est la courbe d'équation $\lambda = f(x,y) = x^2 + \sin(3y)$ dans ce plan.
  - Avec $\lambda = 10$, on a donc $x^2 = 10 - \sin(3y)$: l'intersection est donc la réunion de la courble $x = \sqrt{10 - \sin(3y)}$ et de $x = -\sqrt{10 - \sin(3y)}$.

Exemple 2. Voici d'autres exemples de surfaces :



2 Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^2$

2.1 Boules ouvertes

Étant donné $M=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $A=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, on note

$$\begin{aligned} AM = d(A,M) &= \|M-A\| \\ &= \|\,(x-x_0,\, y-y_0)\,\| \\ &= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \end{aligned}$$

Il s'agit de la distance "usuelle" entre deux points.

Définition 42.1

Soit $A=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$. On appelle boule ouverte de centre A et de rayon r l'ensemble noté

$$\mathscr{B}(A,r) := \left\{ M\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; AM<r \right\}$$

et on appelle boule fermée de centre A et de rayon r l'ensemble noté

$$\overline{\mathscr{B}}(A,r) := \left\{ M\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; AM\leq r \right\}$$

On écrira parfois $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}(A,r)$ pour rappeler qu'il s'agit d'une boule dans $\mathbb{R}^2$. On peut reformuler la définition avec la norme de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(A,r) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < r\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < r^2\right\}\end{aligned}$$

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, ces "boules" représentent en fait des disques (comme ce qu'on a vu dans $\mathbb{C}$ avec les disques ouverts ou fermés). Toutefois, ce formalisme se généralise sans difficulté à $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$, donc on introduit dès cette année ce vocabulaire.

De même, pour tout réel x_0, on a

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}}(x_0,r) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}}(x_0,r) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.2 Ouvert de $\mathbb{R}^2$

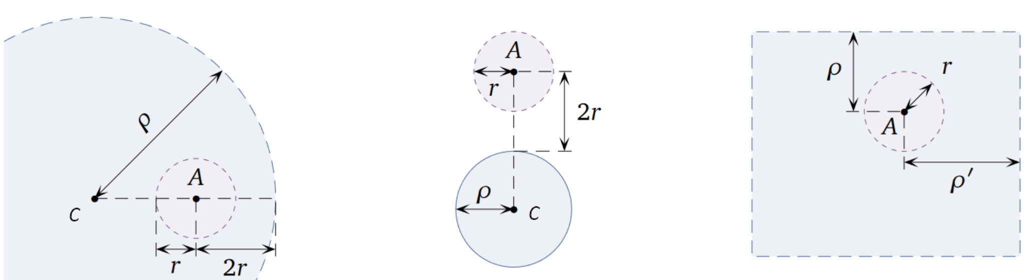
Définition 42.2 – Ouvert

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que Ω est (un) ouvert si :

Cela revient à dire que Ω est un voisinage de chacun de ces points. Bien entendu, le rayon r de la boule dépend du point A considéré.

Exemple 3.
- Toute boule ouverte est un ouvert.
- Le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert.
- Si I et J sont des intervalles ouverts, alors $I \times J$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

La preuve consiste à chaque fois à prendre un point quelconque A de ces ensembles et de déterminer $r > 0$ tel que $\mathscr{B}(A,r)$ est contenu dans cet ensemble. On se contentera d'un dessin pour se donner l'intuition géométrique de la preuve.



À gauche : $\Omega = \mathscr{B}(C,\rho)$. Au milieu : $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathscr{B}}(C,\rho)$. À droite : Ω sous la forme d'un rectangle.

2.3 Limite finie en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On rappelle que dans ce chapitre, on suppose que Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition 42.3 – Limite finie en un point

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $A \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en A si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists r > 0 \qquad \forall M \in \Omega \qquad AM < r \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon$$

En posant $M = (x, y)$ et $A = (x_0, y_0)$, on peut réécrire l'assertion de la définition ci-dessus en :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists r > 0 \qquad \forall (x, y) \in \Omega \qquad \| (x, y) - (x_0, y_0) \| < r \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

Notation. Lorsque f tend vers ℓ en A, on notera

$$\lim_A f = \lim_{M \to A} f(M) = \ell$$

ou encore, en posant $M = (x, y)$ et $A = (x_0, y_0)$:

$$\lim_{(x_0, y_0)} f = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell$$

On pourrait également définir le cas d'une limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un point, mais cela n'est pas l'objet du chapitre.

Théorème 42.4

La majorité des résultats vus pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ restent valides pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: unicité de la limite, opérations sur les limites (combinaison linéaire, produit, quotient, composition à gauche avec une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), passage dans une inégalité large / stricte, théorème d'encadrement.

Démonstration. Dans la majorité des cas, il suffit de remplacer les valeurs absolues de l'ensemble de départ par la norme de $\mathbb{R}^2$. □

Pour montrer qu'une fonction $f : \boxed{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ n'admet pas de limite en un point a de D_f, on a vu deux méthodes :

- *(Unicité de la limite :)*
- *(Caractérisation séquentielle de la limite :)*

Ces deux méthodes se généralisent dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pour montrer que f n'admet pas de limite en un point $A = (x_0, y_0)$. Pour simplifier, supposons $A = (0, 0)$. Il y a une subtilité essentielle quand on passe à une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

- Un point $M = (x, y)$ peut "tendre" vers $(0, 0)$ de bien des manières : en restant selon la droite horizontale $y = 0$, selon la droite verticale $x = 0$, selon une droite oblique $y = x$, ou encore selon une parabole $y = x^2$, etc. Il y a donc d'autant plus de manières d'obtenir une contradiction.

Méthode

Pour montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$, on exhibe deux suites de couples (x_n, y_n) et (x'_n, y'_n) qui tendent tous les deux vers $(0,0)$ mais pour lesquelles

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n)$$

On peut aussi trouver deux valeurs distinctes parmi :

$$f(0,0) \qquad \lim_{x\to 0} f(x,0) \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x,0) \qquad \dots$$

$$\lim_{y\to 0^-} f(0,y) \qquad \lim_{x\to 0} f(x,x) \qquad \lim_{x\to 0} f(-x,x) \qquad \lim_{x\to 0} f(x,-x) \qquad \dots$$

Pour les suites (x_n, y_n), on peut prendre par exemple $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, ou encore $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, qui tendent toutes vers $(0,0)$.

Exemple 4. On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{xy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Montrer que f n'a pas de limite en 0.

2.4 Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition 42.5 – Continuité en un point

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $A \in \Omega$. On dit que f est continue en A si $\lim_{M\to A} f(M) = f(A)$, c'est-à-dire :

En posant $A = (x_0, y_0)$, on peut réécrire $\lim_{(x,y)\mapsto(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ d'une autre manière :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \qquad \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < r \implies |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

Définition 42.6 – Continuité sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur Ω si elle est continue en tout point de Ω.
On notera $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R})$ ou juste $\mathscr{C}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur Ω.

La majorité des résultats vus pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ restent valides.

Théorème 42.7

La combinaison linéaire, le produit, le quotient, la composition de fonctions continues est une fonction continue (là où la fonction est définie).

Exemple 5. Les fonctions $f : (x, y) \mapsto x$ et $g : (x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 42.8

On appelle fonction polynômiale de deux variables toute fonction $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \\ &= \quad a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + \ldots + a_{m0}x^m \\ &\quad + \left(a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + \ldots + a_{m1}x^m\right) y \\ &\quad \ldots \\ &\quad + \left(a_{0n} + a_{1n}x + a_{2n}x^2 + \ldots + a_{mn}x^m\right) y^n \end{aligned}$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ une famille de réels.

Théorème 42.9

Toute fonction polynômiale de deux variables est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. En faisant des produits des fonctions f et g de l'Exemple 5, on peut montrer que toute fonction de la forme $(x, y) \mapsto x^i y^j$ avec $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$ est continue. Par combinaisons linéaires, toute fonction polynômiale en x et y est continue. □

Exemple 6. La fonction
$$P:(x,y)\mapsto -4x^3y+2y^2-xy^4+1$$
est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 7. La norme $(x,y)\mapsto \|(x,y)\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3 Dérivée directionnelle et dérivée partielle

3.1 Dérivée directionnelle (selon un vecteur)

On aimerait définir la dérivée d'une fonction $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de manière similaire au cas d'une fonction à une variable. On pourrait être tenté de définir le nombre dérivée de manière similaire à $\mathbb{R}$:

$$\text{"}\quad \lim_{M\to A}\frac{f(M)-f(A)}{M-A}\quad\text{"}\qquad\qquad \text{(absurde !!)}$$

Mais il y a plusieurs problèmes. D'une part, on divise par $M-A\in\mathbb{R}^2$ ce qui n'a pas de sens. D'autre part, même pour des fonctions f très "gentilles", cette limite n'est pas forcément unique, car cela dépend de la manière dont M tend vers A. La définition qui suit permet toutefois de se ramener au cas réel en imposant à M de tendre vers A en restant dans la même "direction".

Dans la définition ci-dessous, on emploie volontairement une notation vectorielle $\overrightarrow{v}$ mais cela est purement arbitraire.

Définition 42.10 – Dérivée directionnelle selon un vecteur

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $A=(x_0,y_0)\in\Omega$ et $\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^2$. On dit que <u>$f$ est dérivable en A dans la direction $\overrightarrow{v}$</u> si la limite
$$\lim_{t\to0}\frac{f(A+t\overrightarrow{v})-f(A)}{t}$$
existe et est finie. Lorsque c'est le cas, on appelle <u>dérivée de f en A dans la direction $\overrightarrow{v}$</u> le réel
$$D_{\overrightarrow{v}}f(A)=\lim_{t\to0}\frac{f(A+t\overrightarrow{v})-f(A)}{t}\quad\in\mathbb{R}$$

Remarque (Interprétation de $D_{\overrightarrow{v}}f(A)$)**.** Le réel $D_{\overrightarrow{v}}f(A)$ représente la variation infinitésimale de la valeur de f lorsque vous bougez légèrement selon le vecteur $\overrightarrow{v}$ en partant de A :

- $D_{\overrightarrow{v}}f(A)>0$ signifie que pour un point $A'=A+t\overrightarrow{v}$ avec t assez petit, on a $f(A')>f(A)$.
- $D_{\overrightarrow{v}}f(A)<0$ signifie que pour un point $A'=A+t\overrightarrow{v}$ avec t assez petit, on a $f(A')<f(A)$.
- $D_{\overrightarrow{v}}f(A)=0$ signifie que pour un point $A'=A+t\overrightarrow{v}$ avec t assez petit, on a $f(A')\approx f(A)$ (au premier ordre en t).

De plus, plus $D_{\overrightarrow{v}}f(A)$ est grand en valeur absolue, plus la variation entre $f(A')$ et $f(A)$ est importante.

Remarque. On notera que comme $A\in\Omega$ et Ω est ouvert, le point $A'=A+t\overrightarrow{v}$ est toujours dans Ω pour t assez petit : la valeur $f(A')$ est donc bien définie.

Une autre façon d'interpréter $D_{\overrightarrow{v}}f(A)$ est de remarquer que si on pose $F : t \mapsto f(A+t\overrightarrow{v})$, alors $D_{\overrightarrow{v}}f(A) = F'(0)$.

Exemple 8. On pose $f(x,y) = x^2 - y^2$. Déterminer les dérivées directionnelles de f selon les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et aux points A suivants :

- Au point $A = (0,0)$, selon le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,0)$.

- Au point $A = (3,4)$, selon le vecteur $\overrightarrow{v} = (0,1)$.

- Au point $A = (3,4)$, selon le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,2)$.

- Au point $A=(3,4)$, selon le vecteur $\overrightarrow{v}=(10,20)$: on trouve $D_{\overrightarrow{v}}f(A)=-20$

Comme l'illustre les deux derniers exemples ci-dessus, $D_{\overrightarrow{v}}f(A)$ ne dépend pas seulement de la direction de $\overrightarrow{v}$, mais est aussi proportionnel à la norme de $\overrightarrow{v}$.

3.2 Dérivée partielle, calcul "ponctuel"

La définition suivante n'est qu'un cas particulier de la dérivée directionnelle.

Définition 42.11

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ et $A=(x_0,y_0)\in\Omega$.

- La dérivée directionnelle de f en A selon $\overrightarrow{i}=(1,0)$, i.e. $D_{\overrightarrow{i}}f(A)$, lorsqu'elle existe, est appelée dérivée partielle en A selon x. On la note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0):=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$$

- La dérivée directionnelle de f en A selon $\overrightarrow{j}=(0,1)$, i.e. $D_{\overrightarrow{j}}f(A)$, lorsqu'elle existe, est appelée dérivée partielle en A selon y. On la note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0):=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$$

Notation. Attention à bien utiliser des "d ronds" donc $\frac{\partial f}{\partial x}$, et non des "d droits" tels que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Cette dernière notation est en général réservée aux fonctions d'une seule variable en mathématiques.

On pourrait calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ comme on calcule une dérivée directionnelle $D_{\overrightarrow{v}}f(A)$ avec $\overrightarrow{v}=(1,0)$ ou $\overrightarrow{v}=(0,1)$. Mais en pratique, on peut utilis

Méthode – Calcul ponctuel d'une dérivée

Pour calculer une dérivée partielle en un seul point (x_0,y_0), on utilise la même méthode que pour calculer une dérivée directionnelle selon $\overrightarrow{v}=(1,0)$ ou $\overrightarrow{v}=(0,1)$ au point (x_0,y_0).

Exemple 9. On définit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

On a vu que f n'est pas continue en 0. Montrer que (pourtant) f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

3.3 Dérivée partielle, calcul “global”

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a vu au premier semestre deux méthodes pour calculer la dérivée g' :

- **Calcul “ponctuel” en un point** $x_0 \in \mathbb{R}$: on calcule la limite du taux d'accroissement $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ lorsque x tend vers x_0 : cette limite est $g'(x_0)$
- **Calcul “global” en tout point** $x \in \mathbb{R}$: on utilise des formules classiques de dérivation qui permettent de connaitre $g'(x)$ en tout réel x :

$$g(x) = x^2 + \sin x \implies g'(x) = 2x + \cos x$$

  Puis, si on veut connaitre $g'(x_0)$, il suffit de substituer x par x_0.

La Définition 42.11 est un analogue du taux d'accroissement pour calculer les dérivées partielles d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, on peut aussi calculer la dérivée partielle de f de manière “globale” avec les formules classiques de dérivation :

Méthode

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on dérive l'expression $f(x, y)$ selon x, en considérant y comme une constante. On obtient l'expression globale de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Puis, si on veut connaitre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, il suffit de substituer x par x_0 et y par y_0.

La méthode suit le même principe pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, sauf qu'on dérive selon y en considérant x comme une constante. Les formules de dérivation sont exactement les mêmes que pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (combinaison linéaire, produit, inverse, composition, etc.).

Exemple 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + y^2} + \sin(x)$. On admet pour le moment que f admet des dérivées partielles en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

⚠ Dans l'écriture $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, la lettre x est présente deux fois et joue alors deux rôles très différents :

- Dans "∂x", elle précise qu'on dérive dans la direction x, ou encore selon le vecteur $\overrightarrow{i} = (1,0)$.
- Dans "(x,y)", elle donne les coordonnées du point en lequel on évalue $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Dans l'exemple ci-dessus, on peut donc écrire, pour n'importe quel couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{1+b^2} + \cos(a)$$

Remarque. Il n'est pas toujours possible de calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ par les formules usuelles comme à l'Exemple 10. Si on reprend la fonction de l'Exemple 9 :
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

- On ne peut pas calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ car il y a une disjonction de cas au voisinage de $(0,0)$: on ne dispose pas de formule usuelle pour cela.
- Mais, en tout point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, il n'y a pas de disjonction de cas dans une petite boule autour de (x_0,y_0) : on peut donc appliquer les formules classiques pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en tout point $(x,y) \neq (0,0)$:
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (resp. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) signifie qu'on a dérivé f selon x (resp. selon y). Cette notation est adaptée aux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, mais d'autres notations plus générales existent (qu'on peut aussi utiliser pour des fonctions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$) :
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \qquad \left(\text{voire } \frac{\partial f}{\partial x_3}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \text{ si } f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\right)$$
$$\partial_1 f \quad \text{et} \quad \partial_2 f \qquad (\text{voire } \partial_3 f, \cdots, \partial_m f \text{ si } f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R})$$

4 Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

4.1 Définition

Si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en tout point de Ω, alors on peut définir les fonctions :
$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \qquad \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

Définition 42.12

La fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite <u>de classe $\mathscr{C}^1$</u> si elle admet des dérivées partielles en tout point de Ω et si les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur Ω.
On note $\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Exemple 11. Les formes linéaires coordonnées $\varphi_1 : (x,y) \mapsto x$ et $\varphi_2 : (x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 42.13

Toute fonction qui est une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composition d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ est encore de classe $\mathscr{C}^1$ là où elle est définie.

Définition 42.14

On appelle <u>fonction polynômiale de deux variables</u> toute application $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$ une famille de réels.

De manière équivalente, cela revient à dire que $P(x,y)$ peut s'écrire comme un polynôme en x où chaque coefficient est un polynôme en y :

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{ij} y^j \right) x^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(y) x^i}_{\text{polynôme en } x} \qquad \text{avec } \alpha_i(y) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_{ij} y^j}_{\text{polynôme en } y}$$

Exemple 12. La fonction $P(x,y) = 3x^2y^3 - x^5 + y + 8$ est polynômiale de deux variables.

Définition 42.15

On appelle <u>fonction rationnelle de deux variables</u> toute application de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux fonctions polynômiales de deux variables, avec Q différent du polynôme nul.

Corollaire 42.16

Toute fonction polynômiale en les variables x et y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Toute fonction rationnelle en les variables x et y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition (qui est toujours un ouvert).

Démonstration. En effet, ces fonctions sont des combinaisons linéaires, des produits et des quotients des fonctions φ_1 et φ_2 de l'Exemple 11, qui elles sont de classe $\mathscr{C}^1$. □

Exemple 13. La fonction $f(x,y) = \dfrac{x}{1+y^2} + \sin(x)$ de l'Exemple 10 est de classe $\mathscr{C}^1$ (sur $\mathbb{R}^2$) par somme et composée de telles fonctions.

4.2 Gradient et retour sur la dérivée directionnelle

Définition 42.17 – Petit-o

Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}$ et $(h,k) \in \Omega$. On écrit

$$F(h,k) = \underset{(h,k)\to(0,0)}{o} (\|(h,k)\|)$$

pour signifier que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

La limite ci-dessus est sous-entendue épointée (i.e. pour $(h,k) \neq (0,0)$) afin que cela ait un sens.

Remarque. Comme $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}$, on a toujours

$$\boxed{|h| \leq \|(h,k)\| \quad \text{et} \quad |k| \leq \|(h,k)\|}$$

Exemple 14. Montrer que $h^2 = \underset{(h,k)\to(0,0)}{o} (\|(h,k)\|)$.

Définition 42.18 – Gradient

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. En tout point $(x_0, y_0) \in \Omega$ en lequel f admet des dérivées partielles selon x et y, on définit le gradient de f comme étant le vecteur de $\mathbb{R}^2$ suivant :

Ainsi, en tout point $A \in \Omega$, on dispose d'un vecteur $\nabla f(A)$ de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit ∇f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On dit que ∇f est un champ de vecteurs. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors le gradient de f est défini en tout point de Ω. Dans ce qui suit, on rappelle que $\langle \bullet | \bullet \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x + \sin y$. Calculer le gradient de f en $(0,0)$.

Théorème 42.19

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. En tout point $A \in \Omega$, la fonction f admet un DL en A d'ordre 1 si pour tout $\overrightarrow{\varepsilon} = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que le point $A + \overrightarrow{\varepsilon}$ est dans Ω, on a :

Démonstration. Preuve admise et non exigible. □

Comme $A \in \Omega$ et que Ω est ouvert, on a nécessairement $A + \overrightarrow{\varepsilon} \in \Omega$ pour $\|\overrightarrow{\varepsilon}\|$ assez petit. On peut réexprimer le DL de bien des manières, par exemple, avec $A = (x_0, y_0)$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h,k)\|)$$

Exemple 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x + \sin(y)$. Déterminer le DL de f à l'ordre 1 en $(0,0)$.

Corollaire 42.20

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Alors en tout point $A = (a,b) \in \Omega$ et pour tout $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, f admet une dérivée directionnelle en A selon $\overrightarrow{v}$, et on a :

$$D_{\overrightarrow{v}} f(a,b) = \langle \nabla f(a,b) \mid \overrightarrow{v} \rangle = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Démonstration. Pour simplifier, on fait la preuve avec $A = (a,b) = (0,0)$. Comme f est $\mathscr{C}^1$, f admet un développement limité en $(0,0)$. On a donc :

$$f(h,k) = f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h,k)\|)$$

Par ailleurs, on a (pour $t \neq 0$ assez proche de zéro) :

$$\frac{f(A + t\overrightarrow{v}) - f(A)}{t} = \frac{1}{t} \times [f(tv_1, tv_2) - f(0,0)]$$

Or, lorsque t tend vers 0, le vecteur $t\overrightarrow{v} = (tv_1, tv_2)$ tend vers $(0,0)$, de sorte qu'on peut uiliser le DL ci-dessus (par composition) avec $(h,k) = (tv_1, tv_2)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{f(A+t\overrightarrow{v}) - f(A)}{t} &= \frac{1}{t} \times \left[tv_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + tv_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \underset{t\to 0}{o}\left(\|(tv_1, tv_2)\|\right) \right] \\
&= v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \underset{t\to 0}{o}\left(\|(v_1, v_2)\|\right) \\
&\xrightarrow[t\to 0]{} v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)
\end{aligned}$$

D'où f admet une dérivée directionnelle en $\overrightarrow{v}$ et $D_{\overrightarrow{v}} f(a,b) = \langle \nabla f(a,b) \,|\, \overrightarrow{v} \rangle$. □

Exemple 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x + \sin(y)$. Déterminer la dérivée directionnelle de f selon $\overrightarrow{v} = (-3,3)$ au point $(0,\pi)$.

Corollaire 42.21

Si $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, alors f est continue sur Ω.

Démonstration. Soit $A \in \Omega$. Il faut montrer que $\lim\limits_{M\to A} f(M) = f(A)$, ou encore que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(A+(h,k)) = f(A)$$

Or, comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, on a :

$$f(A+(h,k)) = f(A) + \langle \nabla f(A) \,|\, (h,k) \rangle + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\left(\|(h,k)\|\right)$$

Or, quand (h,k) tend vers $(0,0)$, il est clair que le petit-o tend vers $(0,0)$. De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle \nabla f(A) \,|\, (h,k) \rangle| \leq \|\nabla f(A)\| \times \underbrace{\|(h,k)\|}_{\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0}$$

De sorte que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} f(A+(h,k)) = f(A)$. □

4.3 Interprétations du gradient

Soit $A \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Question : Dans quelle direction à partir de A est-ce que f augmente le plus vite ?

On ne s'intéresse qu'à une augmentation **infinitésimale**, localement autour de A. Formellement :

- On fixe $r \ll 1$ et on s'intéresse aux points M à distance r de A (qui sont dans l'ouvert Ω si on prend r assez petits).
- On cherche donc le point M qui vérifie $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = r$ et tel que la variation $f(M) - f(A)$ soit la plus élevée possible.

Pour simplifier les notations, on pose $\overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{AM}$. On a donc $r = \|\overrightarrow{\varepsilon}\| \ll 1$. Or, on a vu qu'**au premier ordre en $\|\overrightarrow{\varepsilon}\|$:**

$$f(A + \overrightarrow{\varepsilon}) - f(A) \approx \langle \nabla f(A) \mid \overrightarrow{\varepsilon} \rangle$$

ce qui se réécrit, puisque $\overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{AM}$:

$$f(M) - f(A) \approx \left\langle \nabla f(A) \middle| \overrightarrow{AM} \right\rangle$$

Ainsi, au premier ordre, $f(M) - f(A)$ sera le plus élevé lorsque le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est dans la même direction et avec le même sens que le gradient de f en A. On en déduit la remarque fondamentale suivante :

Remarque. **$\nabla f(A)$ représente la direction où f croît le plus vite, localement autour de** A. En suivant la direction du gradient en chaque point, on peut ainsi atteindre un maximum local de f (si f est majorée).

Plus généralement :

- Si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire et de même sens que $\nabla f(A)$, alors la variation $f(M) - f(A)$ est positive et la plus grande possible.
- Si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire et de sens opposé à $\nabla f(A)$, alors la variation $f(M) - f(A)$ est négative et la plus grande possible (en valeur absolue).
- Si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\nabla f(A)$, alors $\langle \nabla f(A) \mid \overrightarrow{AM} \rangle$ est nul, donc $f(M) \approx f(A)$ au premier ordre.

Définition 42.22

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la courbe d'équation $f(x, y) = \lambda$ est appelée la ligne de niveau λ de f.

La ligne de niveau de f s'obtient en intersectant la surface $\mathscr{S}$ de f avec le plan $z = \lambda$.

Exemple 18. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + \sin(3y)$. Dans l'Exemple 1 au début du chapitre, la troisième figure présente la ligne de niveau $z = 10$ de f.

Théorème 42.23

Soit $A \in \Omega$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le gradient de f en A est orthogonal à la ligne de niveau qui passe par A, i.e. à la ligne de niveau $z = \lambda$ avec $\lambda = f(A)$.

5 Règle de la chaine

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On sait qu'alors $f \circ g$ est dérivable et on dispose de la formule de dérivation :

$$(D) : \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

Le but de cette section est de généraliser cette formule lorsque f et/ou g sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Selon les cas, il faudra remplacer ou non :

- la **variable** $x \in \mathbb{R}$
- les **dérivées** de $(f \circ g)'$ et de g' (elles sont modifiées à l'identique car ces fonctions ont le même ensemble de départ).
- la **dérivée** de f'.

5.1 Dérivée de $f \circ g$ avec $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $g(\Omega) \subset I$, de sorte que $f \circ g$ a un sens.

- **Variable** x : puisque l'on a $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il faut remplacer dans la formule (D) "$\forall x \in \mathbb{R}$" par "$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$". Idem pour le "$\ldots(x)$" qui deviendra "$\ldots(x, y)$".
- **Dérivées de** $(f \circ g)'$ **et** g' : puisque ce sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, cela n'a pas de sens d'écrire des dérivées classiques "$'$". On peut calculer une des deux dérivées partielles, par exemple $\dfrac{\partial (f \circ g)}{\partial x}(x, y)$.
- **Dérivée de** f' : puisqu'on a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la seule façon de dériver f est de la manière classique : on conserve f'.

Théorème 42.24

Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $g(\Omega) \subset I$. Alors $f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

5.2 Dérivée de $f \circ g$ avec $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Puisqu'on a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, on peut poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = (a(x), b(x))$$

avec $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- **Variable** x :
- **Dérivées de** $(f \circ g)'$ **et** g' :
- **Dérivée de** f' : puisqu'on a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il y a deux façons de dériver f et on doit les conserver toutes les deux. Ainsi, f' devient ∇f :

  $$f'(g(x)) \quad \rightsquigarrow \quad \nabla f(g(x))$$

  et le produit entre les réels $f'(g(x))$ et $g'(x)$ devient un produit scalaire entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

  $$f'(g(x)) \times g'(x) \quad \rightsquigarrow \quad \left\langle \nabla f(g(x)) \,\middle|\, g'(x) \right\rangle$$

Théorème 42.25

Soit $g : I \to \mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $g(I) \subset \Omega$. Alors $f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

5.3 Dérivée de $f \circ g$ avec $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Puisqu'on a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on peut poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = (a(x,y), b(x,y))$$

avec $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- **Variable** x :

- **Dérivées de** $(f \circ g)'$ **et** g' :

- **Dérivée de** f' :

Théorème 42.26

Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $g(\Omega) \subset \Omega'$. Alors $f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

5.4 Exemples applicatifs

Exemple 19. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On pose

$$f(x,y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$$

Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de g.

6 Extrema locaux

Définition 42.27

Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ une partie non vide, et $f : X \to \mathbb{R}$. Soit $A = (x_0, y_0) \in X$

- On dit que f admet un maximum en A si : $\forall (x,y) \in X \qquad f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.
- On dit que f admet un maximum local en A si : $\exists r > 0 \quad \forall (x,y) \in X \cap \mathscr{B}(A,r) \qquad f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$
- On définit de même la notion de minimum (local) en A.
- On dit que f admet un extremum (local) en A si f admet un maximum (local) en A ou un minimum (local) en A.

Dit autrement, f admet un maximum en A si elle est majorée par $f(A)$, et admet un maximum local en A si elle est majorée par $f(A)$ au voisinage de A.

Définition 42.28

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $A = (x_0, y_0) \in \Omega$. On dit que A est un point critique de f si $\nabla f(A) = 0$, càd si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

Théorème 42.29

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $A \in \Omega$. Si f admet un extremum local en A, alors A est un point critique de f.

Méthode

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Pour trouver un extremum local (resp. global) de f :

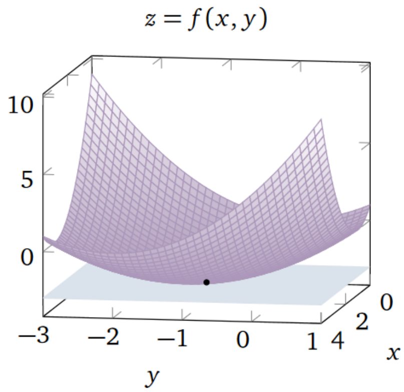
- On cherche les points critiques de f, qui sont des candidats pour être des extrema.
- Pour chaque point critique (x_0, y_0), on étudie le signe local (resp. global) de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$.

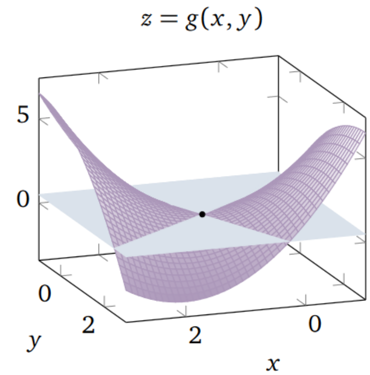
Exemple 20. Déterminer les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto x^2 - 3x + xy + y^2$. Pour chacun d'eux, dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, local ou global.

La réciproque du Théorème 42.29 est fausse ! Un point critique n'est pas toujours un extremum local.

Exemple 21. On pose $g : (x, y) \mapsto x^2 - x - xy - \dfrac{y^2}{2} + 2y$. Montrer que f admet un point critique, mais aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

Voici le graphe des deux fonctions f et g des exemples précédents :


$z = f(x, y)$
10
5
0
−3
−2
−1
0
1
4
2
0
y
x


$z = g(x, y)$
5
0
0
2
y
2
0
x

7 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f tend vers ℓ en (x_0, y_0), on peut :

- Repartir de la définition.
- Majorer $|f(x,y) - \ell|$ par une expression qui dépend de $\|(x - x_0, y - y_0)\|$ et qui tend vers 0 quand cette norme tend vers 0.

Méthode

Dans la pratique, pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$:

- Si on dispose d'une expression unique de f au voisinage de (x_0, y_0) :
  1. On dérive d'abord l'expression $f(x,y)$ selon x, en considérant y comme une constante.
  2. Puis on remplace x et y dans l'expression de la dérivée par x_0 et y_0.
- Sinon, on revient à la définition.